

## CONTROL I MA 22A, 2007/1

Prof. M. del Pino, Prof. Aux. J. Backhoff, J. Campos

Tiempo: 3 hrs.

- (1) Considere la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Muestre que  $f$  es diferenciable en todo punto  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ .

(b) Muestre que  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .

(c) Calcule (cuando existan) las derivadas direccionales

$$f'((0, 0); (e_1, e_2)), \quad \text{con } (e_1, e_2) \neq (0, 0).$$

(d) Determine si  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ .

- (2) Considere la función

$$f(x, y) = \frac{1 - xy \cos(x^3 e^y)}{1 - x^2 - y^2}$$

definida en el conjunto  $\mathcal{D} = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1\}$ . Demuestre que existe  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$  tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}.$$

- (3) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en todo punto de  $\mathbb{R}^2$  y considere su grafo, el conjunto

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y)\}.$$

(a) Demuestre que  $G$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Demuestre que  $\text{Int}(G) = \emptyset$ .

(c) Encuentre (justificando) la frontera en  $\mathbb{R}^3$  del conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 y + z^3 + y^3 + x^3 + y^2 x = 1\}.$$